ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 50, No. 4, 1985

SUR UNE INEGALITE DE H.P. ROSENTHAL ET LE THEOREME LIMITE CENTRAL DANS LES ESPACES DE BANACH

PAR
MICHEL LEDOUX
Département de Mathématique, Université Louis Pasteur, 7, rue René Descartes, F-67084 Strasbourg Cédex, France

ABSTRACT

This paper studies an inequality of H. P. Rosenthal for vector valued random variables, its relations with some geometric properties of Banach spaces and its applications to the study of the central limit theorem in Banach spaces.

Cet article est consacré à l'étude d'une inégalité de H. P. Rosenthal pour des variables aléatoires vectorielles, de ses liens avec certaines propriétés géométriques des espaces de Banach et de ses applications à l'étude du théorème limite central dans les espaces de Banach.

A la recherche de nouveaux sous-espaces complémentés de L_p, H.P. Rosenthal [27], [28], démontre en 1970 la généralisation suivante des inégalités de Khintchine: pour tout réel r de $(2,\infty)$, il existe une constante C_r telle que l'on ait, pour toute suite finie $(X_j)_{1\leqq j\leqq n}$ de variables aléatoires réelles indépendantes symétriques et bornées:

$$\left(E\left\{\left|\sum_{j=1}^{n} X_j\right|^r\right\}\right)^{1/r} \sim_{C_r} \left(\sum_{j=1}^{n} E\{|X_j|^r\}\right)^{1/r} + \left(\sum_{j=1}^{n} E\{|X_j|^2\}\right)^{1/2},$$

la notation $\sim_{C_r}$ signifiant qu'entre le membre de gauche G et le membre de droite D, on a les inégalités: $C_r^{-1}D \leqq G \leqq C_rD$. Nous nous proposons ici d'étudier la validité et les propriétés de ces inégalités pour des variables aléatoires à valeurs dans un espace de Banach suivant la nature de ce dernier. Un problème de définition surgit d'emblée car le simple remplacement des valeurs absolues par des normes ne permet guère d'aller au-delà des notions de

Received March 13, 1984 and in revised form November 7, 1984

type et de cotype d'espaces de Banach. La bonne définition a été mise en évidence par J. Zinn [31]: en notant $(G(X_j))_{1\le j\le n}$ des variables aléatoires gaussiennes centrées et indépendantes telles que, pour tout $j=1,\ldots,n$, $E\{G(X_j)^2\}=E\{X_j^2\}$, les inégalités de Rosenthal s'expriment également sous la forme

$$\left(E\left\{\left|\sum_{j=1}^n X_j\right|^r\right\}\right)^{1/r} \sim_{C_r} \left(\sum_{j=1}^n E\{|X_j|^r\}\right)^{1/r} + \left(E\left\{\left|\sum_{j=1}^n G(X_j)\right|^2\right\}\right)^{1/2}.$$

Cette fois-ci, le remplacement des valeurs absolues par des normes n'est plus trivial en dimension infinie, du moins dans la partie majoration du membre de gauche par celui de droite que nous appelerons désormais inégalité de Rosenthal. C'est sous cette forme que la première extension des inégalités de Rosenthal a été obtenue dans les espaces L_p, $2<p<\infty$ [7].

Décrivons à présent le contenu de l'article: après un paragraphe préliminaire, nous développerons les principales propriétés de l'inégalité de Rosenthal. Celles-ci s'apparentent à diverses propriétés de l'inégalité de type Rademacher et nous compléterons à cet égard l'inégalité de Rosenthal par une inégalité Λ-Rosenthal jouant un rôle analogue à celle du type stable. Parmi les outils essentiels utilisés dans les démonstrations de ces propriétés, figure l'inégalité de J. Hoffmann-Jørgensen [10] présentée dans une forme adaptée due à E. Giné et J. Zinn [8] comme substitut pour des sommes de variables aléatoires indépendantes quelconques de théorèmes usuels sur les sommes de variables de Rademacher ou gaussiennes. Jointe à un résultat de B. Maurey et G. Pisier [21], elle nous permettra en particulier de montrer qu'un espace de Banach est de cotype 2 si et seulement si il vérifie l'inégalité de Rosenthal à tous les ordres. La troisième partie est consacrée aux applications de l'inégalité de Rosenthal à l'étude du théorème limite central classique dans les espaces de Banach, qui est d'ailleurs à l'origine de l'intérêt porté à cette inégalité [7], [31]. L'inégalité de Rosenthal caractérise les espaces dans lesquels les conditions nécessaires classiques pour le théorème limite central sont également suffisantes; elle permet aussi d'étudier ce même théorème limite central dans les espaces de la forme $l_p(E)$. Une caractérisation de l'inégalité de Rosenthal par l'intermédiaire de la loi des grands nombres conclut ce travail.

1. Préliminaires

Soient E et F deux espaces normés; E est finiment représentable dans F si pour tout $\varepsilon>0$ et pour tout sous-espace de dimension finie E_0 de E, il existe un sous-espace F_0 de F et un isomorphisme u de E_0 sur F_0 tel que, pour tout x dans E_0:

$$\|x\| \leqq \|u(x)\| \leqq (1+\varepsilon)\|x\|.$$

La définition de finie représentabilité conduit à celle de super-propriété. Une propriété $\mathcal{P}$ d'espaces de Banach est une super-propriété si, quand E possède $\mathcal{P}$, tout espace de Banach finiment représentable dans E possède également $\mathcal{P}$.

Un espace normé E est de type $p \geqq 1$ (resp. de cotype $p > 0$) s'il existe une constante C et un réel α de $(0,\infty)$ tels que l'on ait, pour toute famille finie $(x_j)_{1\leqq j\leqq n}$ d'éléments de E:

$$\left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} r_j x_j\right\|^{\alpha}\right\}\right)^{1/\alpha} \leqq (\text{resp. } \geqq)\ C\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^p\right)^{1/p}$$

où (r_j) désigne une suite de variables aléatoires de Rademacher indépendantes (c'est-à-dire une suite de variables aléatoires réelles symétriques indépendantes ne prenant que les valeurs $+1$ et -1).

Fixons quelques notations concernant les espaces L_p. Si E est une espace normé, p un réel de $[1,\infty)$ et (S,Σ,μ) un espace mesuré, $L_p(S,\Sigma,\mu;E)$ (noté $L_p(E)$ lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible) désignera l'espace des fonctions mesurables f sur S à valeurs dans E telles que

$$\|f\| = \left(\int_S \|f(s)\|^p \mu(ds)\right)^{1/p} < \infty.$$

Lorsque S sera $\mathbf{N}$ muni de la mesure de dénombrement, $L_p(S,\Sigma,\mu;E)$ sera noté $l_p(E)$ et si $E=\mathbf{R}$ les espaces précédents seront désignés plus simplement par L_p et l_p. Comme d'habitude, c_0 désignera l'espace des suites réelles convergeant vers 0 muni de sa norme usuelle.

Introduisons à présent les quelques notions probabilistes qui nous seront utiles. Soit E un espace de Banach sur le corps des réels muni de sa tribu borélienne. Une variable aléatoire (v.a.) X à valeurs dans E désignera ici une application mesurable d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},P)$ dans E telle que l'image de P par X définisse une mesure de Radon sur la tribu borélienne de E; X prend donc presque sûrement (p.s.) ses valeurs dans une partie séparable de E et nous aurions pu également supposer E séparable. Toute v.a. de $L_p(\Omega,\mathcal{F},P;E)$ $(1\leqq p<\infty)$ est limite presque sûre et dans $L_p(E)$ de v.a. étagées. Une v.a. X est symétrique si X et $-X$ ont même loi. Les sommes de v.a. indépendantes et symétriques vérifient le principe de contraction [13]; le plus souvent, nous l'utiliserons sans commentaire sous la forme suivante: soient $(X_j)_{1\leqq j\leqq n}$ une suite finie de v.a. indépendantes symétriques bornées, $(a_j)_{1\leqq j\leqq n}$ une suite de v.a. réelles avec $|a_j|\leqq 1$ p.s. pour tout $j=1,\ldots,n$ et telle que la suite $(a_jX_j)_{1\leqq j\leqq n}$ soit encore formée de v.a. indépendantes et symétriques; alors, si $p\geqq 1$,

$$E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} a_jX_j\right\|^p\right\}\leqq E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} X_j\right\|^p\right\}.$$

Une v.a. G à valeurs dans E est gaussienne si pour toute forme linéaire f sur E, $f(G)$ est gaussienne réelle. Les v.a. gaussiennes ont des moments de tous ordres, équivalents [6], [16]: pour tout p de $(0,\infty)$, il existe une constante C_p telle que, pour toute v.a. gaussienne G,

$$E\{\|G\|\}\sim_{C_p}(E\{\|G\|^p\})^{1/p}<\infty.$$

Les v.a. à covariance gaussienne seront d'un intérêt particulier dans ce travail. Une v.a. X à valeurs dans E telle que, pour tout élément f du dual E' de E, $E\{f^2(X)\}<\infty$ et $E\{f(X)\}=0$, est dite prégaussienne s'il existe dans E une v.a. gaussienne centrée G de même structure de covariance, c'est-à-dire telle que, pour tout f de E', $E\{f^2(X)\}=E\{f^2(G)\}$. Dans ce qui suit, nous désignerons par $G(X)$ une v.a. gaussienne (unique en loi) de même covariance que X et si (X_j) est une suite de v.a. prégaussiennes indépendantes, il sera toujours sous-entendu que la suite $(G(X_j))$ des gaussiennes associées est également formée de variables indépendantes. L'espace des v.a. prégaussiennes intégrables X sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$ à valeurs dans un espace de Banach E muni de la norme $E\{\|X\|\}+E\{\|G(X)\|\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $L_1(\Omega,\mathcal{F},P;E)$. Ceci résulte immédiatement du lemme suivant qui nous a été communiqué par X. Fernique.

LEMME 1.1. *Soient E et F deux espaces de Banach et soient X et Y deux v.a. prégaussiennes sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$ à valeurs respectivement dans E et F; alors, le couple (X,Y) est prégaussien dans $E\times F$. En particulier, si $E=F$, il existe des réalisations de $G(X)$ et $G(Y)$ telles que $G(X)+G(Y)=G(X+Y)$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\sigma(X,Y)$ la sous-tribu de $\mathcal{F}$ engendrée par les v.a. X et Y et soit H l'espace de Hilbert séparable $L_2(\Omega,\sigma(X,Y),P;\mathbf{R})$. Désignons par $(h_k)_{k\geqq 1}$ une base orthonormale de H et supposons qu'il existe sur $(\Omega,\mathcal{F})$ une suite $(g_k)_{k\geqq 1}$ de v.a. normales centrées réduites indépendantes. Alors, le vecteur gaussien $G(X,Y)$ de composantes:

$$G(X,Y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty} g_kE\{h_kX\},\sum_{k=1}^{\infty} g_kE\{h_kY\}\right)$$

à valeurs dans $E\times F$ a même covariance que le couple (X,Y). Si $E=F$, les deux composantes de $G(X, Y)$ constituent des versions respectivement de $G(X)$ et $G(Y)$ telles que $G(X)+G(Y)$ a même covariance que $X+Y$.

Nous utiliserons également par la suite les propriétés classiques de comparaison des vecteurs gaussiens, par exemple sous la forme de l'inégalité de T.W. Anderson [2] (et là aussi, le plus souvent, sans autre commentaire): si G et G' sont deux v.a. gaussiennes sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans E telles que, pour tout f de E', $E\{f^2(G)\} \leqq E\{f^2(G')\}$, alors, pour tout convexe symétrique C de E, $P\{G \in C\} \geqq P\{G' \in C\}$. Il en résulte immédiatement que si X est prégaussienne dans E et si $E\{f^2(Y)\} \leqq E\{f^2(X)\}$ pour tout f de E', la v.a. faiblement centrée Y est aussi prégaussienne.

Nous concluons ces préliminaires par la définition des fonctionnelles Λ_p $(0<p<\infty)$. Si X est une v.a. à valeurs rélles, on dénotera

$$\Lambda_p(X) = \left(\sup_{t>0} t^p P\{|X|>t\}\right)^{1/p},$$

et si X est à valeurs dans E, $\Lambda_p(X) = \Lambda_p(\|X\|)$. Lorsque $1<p<\infty$, ces fonctionnelles sont équivalentes à des normes et définissent les espaces de Lorentz $L_{p,\infty}$. On a par ailleurs, trivialement, les encadrements suivants, pour tous $p>q$ et toute v.a. réelle X:

$$\Lambda_q(X) \leqq (E\{|X|^q\})^{1/q} \leqq \left(\frac{p}{p-q}\right)^{1/q} \Lambda_p(X).$$

Pour les suites de réels $(\alpha_j)_{j\geqq 1}$, les fonctionnelles λ_p sont définies par:

$$\lambda_p((\alpha_j)) = \left(\sup_{t>0} t^p \operatorname{Card}\{j : |\alpha_j|>t\}\right)^{1/p},$$

et les comparaisons avec les normes l_p données par:

$$\lambda_p((\alpha_j)) \leqq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^p\right)^{1/p} \leqq \left(\frac{p}{p-q}\right)^{1/p} \lambda_q((\alpha_j)).$$

2. L'inégalité de Rosenthal

Un des outils essentiels de l'étude de l'inégalité de Rosenthal est constitué par l'inégalité de J. Hoffmann-Jørgensen ([10] p. 164–165, [3] p. 107). Nous l'utiliserons principalement sous une forme due à E. Giné et J. Zinn [8] que nous présentons avant de poser la définition vectorielle de l'inégalité de Rosenthal. Ainsi adaptée, l'inégalité de Hoffmann-Jørgensen joue le rôle pour des sommes de v.a. indépendantes quelconques des théorèmes de Kahane [13] et Fernique

[6], Landau–Shepp [16], assurant l'équivalence de tous les moments des sommes respectivement de v.a. de Rademacher indépendantes et de v.a. gaussiennes indépendantes.

PROPOSITION 2.1. *Soit E un espace de Banach; pour tous $0 < p, q < \infty$, il existe une constante C ne dépendant que de p et q telle que, pour toute suite finie $(X_j)_{1\le j\le n}$ de v.a. indépendantes symétriques à valeurs dans E vérifiant pour tout j, $E\{\|X_j\|^p\} < \infty$ (resp. $\Lambda_p(X_j) < \infty$), on ait*:

$$\left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^n X_j\right\|^p\right\}\right)^{1/p} \sim_C \left(E\left\{\max_{1\le j\le n}\|X_j\|^p\right\}\right)^{1/p} + \left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^n X_j I_{\{\|X_j\|\le\delta_0\}}\right\|^q\right\}\right)^{1/q}$$

(*resp.*

$$\Lambda_p\left(\sum_{j=1}^n X_j\right) \sim_C \Lambda_p\left(\max_{1\le j\le n}\|X_j\|\right) + \Lambda_q\left(\sum_{j=1}^n X_j I_{\{\|X_j\|\le\delta_0\}}\right)\Bigg)$$

où $\delta_0 = \inf\{u > 0 : \sum_{j=1}^n P\{\|X_j\| > u\} \le (8.3^p)^{-1}\}$.

Nous aurons également besoin du petit lemme technique suivant.

LEMME 2.2. *Soient $(X_j)_{1\le j\le n}$ une suite de v.a. réelles positives, α un réel de $(0,\infty)$ et $\delta_0 = \inf\{u > 0 : \sum_{j=1}^n P\{X_j > u\} \le \alpha\}$; alors, pour tous $0 < p < q < \infty$,*

$$\left(\sum_{j=1}^n E\{X_j^q I_{\{X_j\le\delta_0\}}\}\right)^{1/q} \le \left(\frac{q}{q-p}\right)^{1/q} \alpha^{1/q-1/p}\left(\sup_{t>0} t^p \sum_{j=1}^n P\{X_j > t\}\right)^{1/p}.$$

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n E\{X_j^q I_{\{X_j\le\delta_0\}}\} &\le \int_0^{\delta_0} \sum_{j=1}^n P\{X_j > u\}\,du^q \\ &\le \left(\sup_{t>0} t^p \sum_{j=1}^n P\{X_j > t\}\right)\int_0^{\delta_0} \frac{du^q}{u^p} \\ &\le \frac{q}{q-p}\,\delta_0^{q-p}\left(\sup_{t>0} t^p \sum_{j=1}^n P\{X_j > t\}\right).\end{aligned}$$

Or, pour tout $u > 0$,

$$u^p \sum_{j=1}^n P\{X_j > u\} \le \sup_{t>0} t^p \sum_{j=1}^n P\{X_j > t\},$$

de sorte que

$$\delta_0 \leqq \alpha^{-1/p}\left(\sup_{t>0} t^p \sum_{j=1}^{n} P\{X_j > t\}\right)^{1/p}.$$

La conclusion s'ensuit.

Ces préliminaires étant posés, définissons à présent l'inégalité de Rosenthal sous sa forme vectorielle.

DÉFINITION. *Soit r un réel de* $[1,\infty)$ *et soit E un espace de Banach; E vérifie l'inégalité de Rosenthal d'ordre r notée* Ros(r) *(resp. l'inégalité Λ-Rosenthal d'ordre r notée* Λ-Ros(r)*), s'il existe une constante C telle que l'on ait, pour toute suite finie* $(X_j)_{1\leqq j\leqq n}$ *de v.a. indépendantes symétriques prégaussiennes bornées à valeurs dans E*:

$$\left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} X_j\right\|^r\right\}\right)^{1/r} \leqq C\left(\left(\sum_{j=1}^{n} E\{\|X_j\|^r\}\right)^{1/r} + \left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} G(X_j)\right\|^r\right\}\right)^{1/r}\right) \tag{1}$$

(*resp.*

$$\Lambda_r\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) \leqq C\left(\left(\sup_{t>0} t^r \sum_{j=1}^{n} P\{\|X_j\| > t\}\right)^{1/r} + \Lambda_r\left(\sum_{j=1}^{n} G(X_j)\right)\right)\Big). \tag{2}$$

REMARQUES. (1) L'inégalité co-Ros(r) définie en exigeant que l'inégalité inverse de (1) soit satisfaite n'est que d'un intérêt relatif dans cette étude; il est aisé de constater en effet que l'inégalité co-Ros(r) est satisfaite si et seulement si E est de type 2 et de cotype r.

(2) Si X est une v.a. prégaussienne bornée sur $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ à valeurs dans E, le théorème de convergence des martingales vectorielles nous assure l'existence d'une suite croissante $(\mathscr{F}_N)$ de sous-tribus finies de $\mathscr{F}$ telle que $(X^N) = (E\{X \mid \mathscr{F}_N\})$ converge p.s. et dans tous les $L_p(\Omega, \mathscr{F}, P; E)$ vers X. Comme $E\{f^2(X^N)\} \leqq E\{f^2(X)\}$, nous en déduisons en outre que $E\{\|G(X^N)\|^p\} \leqq E\{\|G(X)\|^p\}$. Ces considérations justifient la possibilité d'une approximation par des v.a. étagées dans les inégalités Ros et Λ-Ros de sorte que ces dernières définissent des super-propriétés. Par ailleurs, la bornitude des X_j peut être remplacée par les conditions $E\{\|X_j\|^r\} < \infty$ (resp. $\Lambda_r(X_j) < \infty$) pour tout $j = 1, \ldots, n$, et, par un argument classique de désymétrisation, la symétrie peut être omise (les variables prégaussiennes sont centrées).

(3) Les inégalités Ros(r) et Λ-Ros(r) ne sont pas modifiées quand les membres de gauche de (1) et (2) sont remplacés par $(E\{\|\sum_{j=1}^{n} X_j\|^s\})^{1/s}$, resp. $\Lambda_s(\sum_{j=1}^{n} X_j)$, pour n'importe quel $s \leqq r$. C'est une conséquence de l'inégalité de J. Hoffmann-Jørgensen; vérifions-le par exemple pour Ros(r), C désignant ci-dessous une

constante suceptible de changer de la première ligne à la seconde:

$$\left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} X_j\right\|^r\right\}\right)^{1/r} \leqq C\left(\left(E\left\{\max_{1\leqq j\leqq n}\|X_j\|^r\right\}\right)^{1/r} + \left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} X_j\right\|^s\right\}\right)^{1/s}\right)$$

$$\leqq C\left(\left(\sum_{j=1}^{n} E\{\|X_j\|^r\}\right)^{1/r} + \left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} G(X_j)\right\|^r\right\}\right)^{1/r}\right).$$

Nous formulons la prochaine remarque sous forme d'une proposition; elle permet de passer de v.a. de même loi à des variables quelconques. Le principe de la démonstration est celui de la proposition 5.1 de [24] doublé d'un argument de L. Le Cam [17] de la théorie de la poissonisation adapté ici à des lois multinomiales.

PROPOSITION 2.3. *Si l'inégalité* (1) (*resp.* (2)) *est satisfaite pour des v.a. indépendantes symétriques prégaussiennes bornées et équidistribuées, E vérifie* Ros(r) (*resp.* Λ-Ros(r)).

DÉMONSTRATION. Détaillons d'abord le cas de Ros(r). Désignons par $(Y_j)_{1\leqq j\leqq n}$ une suite finie de v.a. indépendantes symétriques prégaussiennes bornées à valeurs dans E. Soient également $(\varphi_j)_{1\leqq j\leqq n}$ des v.a. réelles symétriques à supports disjoints, indépendantes de la suite $(Y_j)_{1\leqq j\leqq n}$ et telles que, pour tout $j=1,\dots,n$,

$$P\{\varphi_j=1\}=P\{\varphi_j=-1\}=\tfrac{1}{2}(1-P\{\varphi_j=0\})=\frac{1}{2n}.$$

Considérons $X=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j Y_j$ et désignons par $(X_i)_{1\leqq i\leqq n}$ des copies indépendantes de X; par hypothèse,

$$\left(E\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} X_i\right\|^r\right\}\right)^{1/r} \leqq C((nE\{\|X\|^r\})^{1/r} + n^{1/2}(E\{\|G(X)\|^r\})^{1/r}).$$

Comme

$$E\{\|X\|^r\}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}E\{\|Y_j\|^r\} \quad \text{et} \quad G(X)=\frac{1}{n^{1/2}}\sum_{j=1}^{n}G(Y_j),$$

la proposition sera établie si nous parvenons à montrer que

$$E\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} X_i\right\|^r\right\} \geqq \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)^r E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} Y_j\right\|^r\right\}.$$

Désignons à cet effet par $((Y_{ji})_{1\leqq j\leqq n})_{1\leqq i\leqq n}$ des copies indépendantes de la suite $(Y_j)_{1\leqq j\leqq n}$ et posons $Y_{j0}=0$ pour tout $j=1,\dots,n$. Il est alors aisé de vérifier, par exemple sur les fonctions caractéristiques, que $\Sigma_{i=1}^n X_i$ a même loi que $T_n = \Sigma_{j=1}^n \Sigma_{i=0}^{\zeta_j^n} Y_{ji}$ où $(\zeta_1^n, \ldots, \zeta_n^n)$ suit une loi multinomiale de taille n à n paramètres $(1/n, \ldots, 1/n)$, indépendante de ce qui précède. Pour tout $j = 1, \ldots, n$, posons $\xi_j^n = \zeta_j^n \wedge 1$, puis $S_n = \Sigma_{j=1}^n \Sigma_{i=0}^{\xi_j^n} Y_{ji}$. Si $R_n = T_n - S_n$, par symétrie, pour tout $t > 0$ et tout $(p_1, \ldots, p_n) \in \{1, \ldots, n\}^n$ avec $p_1 + \cdots + p_n = n$,

$$\begin{aligned} &P\{\|S_n - R_n\| > t \mid (\zeta_1^n, \ldots, \zeta_n^n) = (p_1, \ldots, p_n)\} \\ &\quad = P\{\|S_n + R_n\| > t \mid (\zeta_1^n, \ldots, \zeta_n^n) = (p_1, \ldots, p_n)\} \\ &\quad \geqq \frac{1}{2} P\{\|S_n\| > t \mid (\zeta_1^n, \ldots, \zeta_n^n) = (p_1, \ldots, p_n)\}, \end{aligned}$$

et donc

$$P\left\{\left\|\sum_{i=1}^n X_i\right\| > t\right\} \geqq \tfrac{1}{2} P\{\|S_n\| > t\}.$$

Mais, toujours par symétrie des Y_j, si (r_j) désigne une suite de v.a. de Rademacher indépendantes, indépendante des Y_j et des ζ_j^n,

$$E\left\{\left\|\sum_{i=1}^n X_i\right\|^r\right\} \geqq \tfrac{1}{2} E\{\|S_n\|^r\} = \tfrac{1}{2} E\left\{\left\|\sum_{j=1}^n \xi_j^n Y_j\right\|^r\right\} = \tfrac{1}{2} E\left\{\left\|\sum_{j=1}^n r_j \xi_j^n Y_j\right\|^r\right\}.$$

Bien que les v.a. ξ_j^n ne soient pas indépendantes, la suite $(r_j \xi_j^n)_{1 \leqq j \leqq n}$ est une suite symétrique et le principe de contraction s'applique [22] pour fournir

$$\left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^n r_j \xi_j^n Y_j\right\|^r\right\}\right)^{1/r} \geqq \min_{1 \leqq j \leqq n} E\{|\xi_j^n|\} \left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^n Y_j\right\|^r\right\}\right)^{1/r}.$$

Enfin, pour tout $j = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} E\{|\xi_j^n|\} = E\{|\xi_1^n|\} &= P\{\zeta_1^n \geqq 1\} = 1 - P\{\zeta_1^n = 0\} \\ &= 1 - \sum_{p_2 + \cdots + p_n = n} \frac{1}{n^n} \frac{n!}{p_2! \cdots p_n!} \\ &= 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \geqq 1 - \frac{1}{e}, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

En utilisant l'inégalité de J. Hoffmann-Jørgensen par l'intermédiaire de la remarque (3), le raisonnement pour Λ-Ros(r) est identique sauf pour $r = 1$, le principe de contraction ne valant plus dans la forme ci-dessus pour des moments strictement plus petits que 1. Il faut, pour Λ-Ros(1), appliquer les inégalités de la proposition 2.1 dans toute leur force; avec les mêmes notations que précédemment, on a, par hypothèse et par application de la proposition 2.1:

$$E\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} X_i I_{\{\|X_i\|\leqq\delta_0\}}\right\|\right\} \leqq C(n\Lambda_1(X) + n^{1/2}\Lambda_1(G(X)))$$

$$= C\left(\sup_{t>0} t\sum_{j=1}^{n} P\{\|Y_j\|>t\} + \Lambda_1\left(\sum_{j=1}^{n} G(Y_j)\right)\right)$$

où $\delta_0 = \inf\{u>0: nP\{\|X\|>u\} \leqq \frac{1}{24}\}$. Si on note $X' = XI_{\{\|X\|\leqq\delta_0\}}$ et $Y'_j = Y_j I_{\{\|Y_j\|\leqq\delta_0\}}$, $j = 1, \ldots, n$, le raisonnement précédent s'applique à X' et $(Y'_j)_{1\leqq j\leqq n}$ et fournit:

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} Y_j I_{\{\|Y_j\|\leqq\delta_0\}}\right\|\right\} \leqq C\left(\sup_{t>0} t\sum_{j=1}^{n} P\{\|Y_j\|>t\} + \Lambda_1\left(\sum_{j=1}^{n} G(Y_j)\right)\right).$$

Comme $\delta_0 = \inf\{u>0: \Sigma_{j=1}^n P\{\|Y_j\|>u\} \leqq \frac{1}{24}\}$, la conclusion s'obtient d'une nouvelle application de la proposition 2.1. Ceci termine la démonstration de la proposition 2.3.†

Remarquons que la proposition 2.3 justifie a posteriori la définition de Λ-Ros(r) où nous aurions pu choisir $(\Sigma_{j=1}^n \Lambda_r^r(X_j))^{1/r}$ en lieu et place de $(\sup_{t>0} t^r \Sigma_{j=1}^n P\{\|X_j\|>t\})^{1/r}$. Ces deux quantités coïncidant pour des variables équidistribuées, les deux définitions possibles sont donc équivalentes.

Le théorème suivant rassemble les premières propriétés des inégalités Rosenthal et Λ-Rosenthal; elles sont à rapprocher de résultats analogues sur les inégalités de type et type stable [21].

THÉORÈME 2.4. *Soit E un espace de Banach.*

(i) *Si E vérifie* Ros(r), *E vérifie* Ros(r') *pour tout $r' \leqq r$.*

(ii) *Si E vérifie* Λ-Ros(r), *E vérifie* Ros(r), *et si E vérifie* Ros(r), *E vérifie* Λ-Ros(r') *pour tout $r' < r$.*

(iii) *Si $p \geqq r$, E vérifie* Ros(r) *si et seulement si $l_p(E)$ vérifie* Ros(r).

DÉMONSTRATION. Des deux premiers points, il suffit de montrer le second, et de ce second point, seule la deuxième assertion nécessite une démonstration, la première étant triviale. Supposons donc que E vérifie Ros(r) et fixons $r' < r$; dans ce qui va suivre C désignera une constante (ne dépendant que de r, r' et E) suceptible de changer de place en place. En vertu de la proposition 2.1, pour toute suite $(X_j)_{1\leqq j\leqq n}$ de v.a. indépendantes symétriques prégaussiennes bornées à

† La poissonisation de L. Le Cam (telle qu'elle est détaillée dans [3], p. 120–123) peut également être appliquée directement pour fournir le résultat de cette proposition.

valeurs dans E,

$$\Lambda_{r'}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) \leqq C\left(\Lambda_{r'}\left(\max_{1\leqq j\leqq n}\|X_j\|\right) + \left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} X_j I_{\{\|X_j\|\leqq\delta_0\}}\right\|^r\right\}\right)^{1/r}\right)$$

où $\delta_0 = \inf\{u > 0 : \sum_{j=1}^{n} P\{\|X_j\| > u\} \leqq (8.3^{r'})^{-1}\}$. Puis, par hypothèse,

$$\left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} X_j I_{\{\|X_j\|\leqq\delta_0\}}\right\|^r\right\}\right)^{1/r}$$

$$\leqq C\left(\left(\sum_{j=1}^{n} E\{\|X_j\|^r I_{\{\|X_j\|\leqq\delta_0\}}\}\right)^{1/r} + \left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} G(X_j I_{\{\|X_j\|\leqq\delta_0\}})\right\|^r\right\}\right)^{1/r}\right)$$

$$\leqq C\left(\left(\sup_{t>0} t^{r'} \sum_{j=1}^{n} P\{\|X_j\| > t\}\right)^{1/r'} + \Lambda_{r'}\left(\sum_{j=1}^{n} G(X_j)\right)\right)$$

la dernière inégalité résultant du lemme 2.2 et des propriétés gaussiennes. Le point (ii) s'ensuit.

En ce qui concerne (iii), il suffit de prouver que si $p \geqq r$ et si E vérifie $\mathrm{Ros}(r)$, $l_p(E)$ vérifie également $\mathrm{Ros}(r)$. Soit $(X_j)_{1\leqq j\leqq n}$ une suite de v.a. indépendantes symétriques prégaussiennes bornées à valeurs dans $l_p(E)$; $(X_j^k)_{k\geqq 1}$ désignera la suite des composantes de X_j dans $l_p(E)$, $(G(X_j^k))_{k\geqq 1}$ constitue une version de $G(X_j)$. Il est aisé de constater que pour tout k, $(X_j^k)_{1\leqq j\leqq n}$ définit une suite de v.a. indépendantes symétriques prégaussiennes bornées à valeurs dans E. D'après la proposition 2.1, C désignant comme précédement une constante suceptible de varier d'une ligne à une autre,

$$\left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} X_j\right\|^r\right\}\right)^{1/r} \leqq C\left(\left(E\left\{\max_{1\leqq j\leqq n}\|X_j\|^r\right\}\right)^{1/r} + \left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} X_j I_{\{\|X_j\|\leqq\delta_0\}}\right\|^p\right\}\right)^{1/p}\right)$$

où $\delta_0 = \inf\{u > 0 : \sum_{j=1}^{n} P\{\|X_j\| > u\} \leqq (8.3)^r)^{-1}\}$. Toujours par la proposition 2.1, mais cette fois-ci dans E:

$$\left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} X_j I_{\{\|X_j\|\leqq\delta_0\}}\right\|^p\right\}\right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} X_j^k I_{\{\|X_j\|\leqq\delta_0\}}\right\|^p\right\}\right)^{1/p}$$

$$\leqq C\left(\sum_{k=1}^{\infty} E\left\{\max_{1\leqq j\leqq n}\|X_j^k\|^p I_{\{\|X_j\|\leqq\delta_0\}}\right\} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} X_j^k\right\|^r\right\}\right)^{p/r}\right)^{1/p}$$

où nous avons simplifié le dernier terme par contraction. D'après le lemme 2.2,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} E\left\{\max_{1\leqq j\leqq n}\|X_j^k\|^p I_{\{\|X_j\|\leqq\delta_0\}}\right\}\right)^{1/p} \leqq \left(\sum_{j=1}^{n} E\{\|X_j\|^p I_{\{\|X_j\|\leqq\delta_0\}}\}\right)^{1/p}$$

$$\leqq C\left(\sum_{j=1}^{n} E\{\|X_j\|^r\}\right)^{1/r},$$

et, par hypothèse:

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\Big(E\Big\{\Big\|\sum_{j=1}^{n}X_j^k\Big\|^r\Big\}\Big)^{p/r}\Big)^{1/p}$$

$$\leqq C\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{n}E\{\|X_j^k\|^r\}\Big)^{p/r}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(E\Big\{\Big\|\sum_{j=1}^{n}G(X_j^k)\Big\|^r\Big\}\Big)^{p/r}\Big)^{1/p}.$$

Mais, en vertu de l'inégalité du triangle et des moments gaussiens équivalents, cette dernière quantité est encore majorée par:

$$C\Big(\Big(\sum_{j=1}^{n}E\{\|X_j\|^r\}\Big)^{1/r}+\Big(E\Big\{\Big\|\sum_{j=1}^{n}G(X_j)\Big\|^r\Big\}\Big)^{1/r}\Big)$$

et la conclusion s'ensuit.

L'espace c_0 ne satisfait à aucune des inégalités $\mathrm{Ros}(r)$ hormis la propriété triviale $\mathrm{Ros}(1)$ vérifiée dans tout espace de Banach. La démonstration de cette assertion s'obtient d'une modification convenable d'un exemple de S. A. Chobanjan et V. I. Tarieladze [5].

PROPOSITION 2.5. *L'espace c_0 ne vérifie pas* Λ-Ros(1).

DÉMONSTRATION. Soit $(\xi^k)_{k\geqq 1}$ une suite de v.a. réelles indépendantes de lois:

$$P\{\xi^k=1\}=P\{\xi^k=-1\}=\tfrac{1}{2}(1-P\{\xi^k=0\})=\frac{1}{2\operatorname{Log}(k+1)},$$

et soit également $((\xi_j^k)_{k\geqq 1})_{j\geqq 1}$ une suite de copies indépendantes de la suite (ξ^k). Choisissons deux suites de réels positifs $(\alpha_j)_{j\geqq 1}$ et $(\beta(k))_{k\geqq 1}$ avec $(\beta(k))$ croissante, $\beta(k)\geqq 1$ pour tout k et $\lim_{k\to\infty}\beta(k)=\infty$, et telles que l'inégalité suivante soit en défaut pour toute constante C et tout entier n assez grand:

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\leqq C\beta(2^{n^2})\Big(\lambda_1((\alpha_j)_{1\leqq j\leqq n})+\Big(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^2\Big)^{1/2}\Big).$$

Posons à présent, pour tout $j\geqq 1$:

$$X_j=\Big(\frac{\alpha_j}{\beta(k)}\xi_j^k\Big)_{k\geqq 1};$$

X_j est une v.a. à valeurs dans c_0, de gaussienne de même covariance

$$G(X_j)=\Big(\frac{\alpha_j}{\beta(k)\sqrt{\operatorname{Log}(k+1)}}g_j^k\Big)_{k\geqq 1}$$

où (g_j^k) désigne une suite double de v.a. normales centrées réduites indépendantes. Pour tous n, $k \geqq 1$, posons

$$E_{nk} = \bigcap_{j=1}^{n} \{\xi_j^k = 1\} \quad \text{et} \quad A_n = \bigcup_{k=1}^{2^{n^2}} E_{nk}.$$

On vérifie immédiatement que

$$P(A_n) = 1 - \prod_{k=1}^{2^{n^2}} P(E_{nk}^c) = 1 - \prod_{k=1}^{2^{n^2}} \left(1 - \frac{1}{2\operatorname{Log}(k+1))^n}\right)$$

et donc que $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 1$. Supposons à présent que c_0 vérifie Λ-Ros(1) avec C comme constante; pour tout n, on aurait:

$$\Lambda_1\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) \leqq C\left(\sup_{t>0} t \sum_{j=1}^{n} P\{\|X_j\| > t\} + \Lambda_1\left(\sum_{j=1}^{n} G(X_j)\right)\right)$$

$$\leqq C\left(\lambda_1((\alpha_j)_{1\leqq j \leqq n}) + \frac{1}{\alpha_1}\Lambda_1(G(X_1))\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2\right)^{1/2}\right).$$

Or,

$$\Lambda_1\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \sup_{t>0} tP\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} X_j\right\| > t\right\}$$

$$= \sup_{t>0} tP\left\{\sup_k \frac{1}{\beta(k)}\left|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \xi_j^k\right| > t\right\}$$

$$\geqq \sup_{t>0} tP\left\{\sup_{k \leqq 2^{n^2}} \frac{1}{\beta(k)}\left|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \xi_j^k\right| > t, A_n\right\}$$

$$\geqq \frac{1}{\beta(2^{n^2})}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\right) P(A_n).$$

Lorsque n tend vers l'infini, le choix des suites (α_j) et $(\beta(k))$ fournit une contradiction; c_0 ne vérifie donc pas Λ-Ros(1).

Le théorème suivant, fondamental dans notre analyse, met en évidence le caractère de base joué par les espaces de cotype 2 vis-à-vis de l'inégalité de Rosenthal.

THÉORÈME 2.6. *Soit E un espace de Banach; E est de cotype 2 si et seulement si E vérifie* Ros(r) *pour tout r.*

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord E de cotype 2. Il est bien connu [21] que l'on peut remplacer dans la définition du cotype 2 (comme dans celle du type 2 d'ailleurs) la suite de v.a. de Rademacher par une suite gaussienne orthonormale (g_j). Considérons alors une v.a. prégaussienne bornée sur un espace

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans E. Si $(\mathcal{F}_N)$ désigne une suite de sous-tribus finies de $\mathcal{F}$ telle que $(X^N) = (E\{X \mid \mathcal{F}_N\})$ converge p.s. et dans $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P; E)$ vers X, nous obtenons, pour une certaine constante C:

$$E\{\|X\|^2\} = \lim_{N\to\infty} E\{\|X^N\|^2\} \leqq C \overline{\lim_{N\to\infty}} E\{\|G(X^N)\|^2\} \leqq CE\{\|G(X)\|^2\}$$

la première inégalité résultant de l'hypothèse de cotype 2 (les tribus $\mathcal{F}_N$ sont finies) et la seconde du fait que $E\{f^2(X^N)\} \leqq E\{f^2(X)\}$ pour tout entier N et tout f de E'. Soit maintenant une suite $(X_j)_{1\leqq j\leqq n}$ de v.a. indépendantes symétriques prégaussiennes bornées à valeurs dans E; d'après ce qui précède,

$$E\left\{\left\|\sum_{j=1}^n X_j\right\|^2\right\} \leqq CE\left\{\left\|\sum_{j=1}^n G(X_j)\right\|^2\right\}.$$

Mais alors, pour tout r, en vertu de l'inégalité de J. Hoffmann-Jørgensen:

$$\left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^n X_j\right\|^r\right\}\right)^{1/r} \leqq C\left(\left(E\left\{\max_{1\leqq j\leqq n}\|X_j\|^r\right\}\right)^{1/r} + \left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^n X_j\right\|^2\right\}\right)^{1/2}\right)$$

$$\leqq C\left(\left(\sum_{j=1}^n E\{\|X_j\|^r\}\right)^{1/r} + \left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^n G(X_j)\right\|^r\right\}\right)^{1/r}\right)$$

et E vérifie Ros(r). Réciproquement, supposons que E n'est pas de cotype 2 et montrons qu'il existe des réels r tels que E ne vérifie pas Ros(r). Nous distinguons deux cas: si c_0 est finiment représentable dans E, E ne vérifie Ros(r) pour aucun $r > 1$ d'après la proposition précédente et le caractère de superpropriété de l'inégalité de Rosenthal. Si c_0 n'est pas finiment représentable dans E, d'après un théorème de B. Maurey et G. Pisier [21], E est de cotype fini q; montrons alors que E ne peut vérifier Ros(r) pour $r > q$. Supposons au contraire que E vérifie Ros(r) pour un $r > q$. Il existerait une constante C telle que, pour toute suite finie $(X_j)_{1\leqq j\leqq n}$ de v.a. indépendantes symétriques prégaussiennes bornées et équidistribuées à valeurs dans E, on ait:

$$\left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^n X_j\right\|^r\right\}\right)^{1/r} \leqq C((nE\{\|X_1\|^r\})^{1/r} + n^{1/2}E\{\|G(X_1)\|\}). \tag{3}$$

Mais comme $r > q$ et E est de cotype q,

$$\left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^n X_j\right\|^r\right\}\right)^{1/r} \geqq \left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^n X_j\right\|^q\right\}\right)^{1/q} \geqq C_q(nE\{\|X_1\|^q\})^{1/q}.$$

Les constantes C et C_q étant ainsi déterminées, choisissons un entier n tel que:

$$C_q n^{1/q} > C(n^{1/r} + 1).$$

Comme E n'est pas de cotype 2, il existe des points (non nuls) $x_1, \ldots, x_N$ de E tels que

$$\sum_{k=1}^{N} \|x_k\|^2 = 1 \quad \text{et} \quad E\left\{\left\|\sum_{k=1}^{N} g_k x_k\right\|^2\right\} \leqq \frac{1}{n}.$$

Posons $y_k = x_k/\|x_k\|$ pour tout k et désignons par X_1 la v.a. de loi $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2}\|x_k\|^2(\delta_{y_k} + \delta_{-y_k})$. Clairement $\|X_1\| = 1$ p.s. et $G(X_1) = \sum_{k=1}^{N} g_k x_k$ de sorte l'inégalité (3) appliquée à X_1 pour cet n mène à une contradiction. Ceci achève la démonstration du théorème 2.6.

Il résulte des théorèmes 2.4 et 2.6 que si E est de cotype 2, $l_p(E)$ vérifie $\mathrm{Ros}(p)$ si $2 < p < \infty$ et $\mathrm{Ros}(r)$ pour tout r si $1 \leqq p \leqq 2$. Si par contre E n'est pas de cotype 2, $l_p(E)$ ne vérifie pas Λ-$\mathrm{Ros}(p)$. C'est l'objet de la proposition suivante.

PROPOSITION 2.7. *Soit E un espace de Banach; si E n'est pas de cotype 2, $l_p(E)$ $(1 \leqq p < \infty)$ ne vérifie pas Λ-$\mathrm{Ros}(p)$. En particulier, si $2 < p < \infty$, l_p ne vérifie pas Λ-$\mathrm{Ros}(p)$.*

DÉMONSTRATION. La deuxième partie de la proposition s'obtient simplement en considérant $E = l_p$, qui n'est pas de cotype 2 lorsque $2 < p < \infty$, et en utilisant l'équivalence au sens de la finie représentabilité des différents espaces L_p. Démontrons donc la première assertion en supposant que $l_p(E)$ vérifie Λ-$\mathrm{Ros}(p)$ avec C pour constante; choisissons une suite finie de réels positifs $(\alpha_j)_{1 \leqq j \leqq n}$ telle que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^p\right)^{1/p} > 2C\lambda_p((\alpha_j)_{1 \leqq j \leqq n}).$$

Un tel choix est évidemment possible. Comme E n'est pas de cotype 2, par un raisonnement analogue à celui utilisé dans la démonstration du théorème 2.6, il existe une v.a. prégaussienne symétrique Y à valeurs dans E telle que:

$$\|Y\| = 1 \quad \text{p.s.} \qquad \text{et} \qquad (E\{\|G(Y)\|^p\})^{1/p} \leqq 1/2C.$$

Considérons une suite $(Y_j)_{1 \leqq j \leqq n}$ de copies indépendantes de Y et posons, pour tout $j = 1, \ldots, n$: $X_j = \alpha_j Y_j e_j$, (e_j) désignant la base canonique de l_p. L'inégalité Λ-$\mathrm{Ros}(p)$ appliquée à la suite $(X_j)_{1 \leqq j \leqq n}$ s'écrit:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^p\right)^{1/p} \leqq C\left(\lambda_p((\alpha_j)_{1 \leqq j \leqq n}) + \frac{1}{2C}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^p\right)^{1/p}\right).$$

Le choix de $(\alpha_j)_{1\leqq j\leqq n}$ contredit notre hypothèse de départ et la proposition s'ensuit.

Nous comparons dans l'alinéa suivant l'inégalité de Rosenthal à des propriétés géométriques classiques dans les espaces munis d'une structure de treillis. Il est clair qu'un espace de type p vérifie $\mathrm{Ros}(p)$; la propriété de type ne s'étendant pas au-delà de 2, cette comparaison ne peut guère être poursuivie dans un espace de Banach général. Dans les treillis néanmoins, la notion de convexité permet d'aller un peu plus loin dans cette direction.

Un treillis de Banach E est p-convexe, $1\leqq p<\infty$, s'il existe une constante M telle que:

$$\left\|\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^p\right)^{1/p}\right\|\leqq M\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^p\right)^{1/p}$$

pour toute suite $(x_j)_{1\leqq j\leqq n}$ d'éléments de E, et p-concave si l'inégalité inverse est satisfaite. Nous renvoyons à [19] pour ces définitions et pour les principales opérations de calcul dans les treillis, telle notamment la concavification [14].

Le théorème suivant est essentiellement dû à G. Pisier et J. Zinn [26] (voir également E. Giné et J. Zinn [8]).

THÉORÈME 2.8. *Soit E un treillis de Banach q-concave pour un $q<\infty$ et soit $1\leqq p<\infty$; si E est p-convexe, E vérifie* $\mathrm{Ros}(p)$.

DÉMONSTRATION. Si $p\leqq 2$, E est de type p et donc vérifie $\mathrm{Ros}(p)$. Nous supposons donc dans ce qui suit $p>2$. Le lemme suivant de E. Giné et J. Zinn [8] nous sera utile au cours de la preuve.

LEMME 2.9. *Soit E un treillis de Banach 2-convexe et soit X une v.a. prégaussienne bornée à valeurs dans E; alors*

$$E\{|X|^2\}=E\{|G(X)|^2\}.$$

D'après la proposition 2.3, il nous suffit d'établir l'inégalité $\mathrm{Ros}(p)$ pour des v.a. $(X_j)_{1\leqq j\leqq n}$ à valeurs dans E, indépendantes, symétriques, prégaussiennes, bornées, et équidistribuées. Désignons par (r_j) une suite de v.a. de Rademacher indépendantes, indépendante de la suite (X_j). Dans ce qui suit, C désignera une constante (ne dépendant pas de la suite (X_j)) suceptible de changer de place en place. En vertu des inégalités de Khintchine dans les treillis [20], par symétrie des X_j,

$$E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n}X_j\right\|^p\right\}=E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n}r_jX_j\right\|^p\right\}\leqq CE\left\{\left\|\left(\sum_{j=1}^{n}|X_j|^2\right)^{1/2}\right\|^p\right\}.$$

Si $(X'_j)_{1\leqq j\leqq n}$ désigne une copie indépendante de la suite $(X_j)_{1\leqq j\leqq n}$ et E' l'intégration par rapport à cette suite, on a:

$$\Big(\sum_{j=1}^n |X_j|^2\Big)^{1/2} \leqq \left|\Big(\sum_{j=1}^n |X_j|^2\Big)^{1/2} - E\Big\{\Big(\sum_{j=1}^n |X_j|^2\Big)^{1/2}\Big\}\right| + E\Big\{\Big(\sum_{j=1}^n |X_j|^2\Big)^{1/2}\Big\}$$

$$\leqq E'\left\{\left|\sum_{j=1}^n (|X_j|^2 - |X'_j|^2)\right|^{1/2}\right\} + E\Big\{\Big(\sum_{j=1}^n |X_j|^2\Big)^{1/2}\Big\}.$$

Par suite:

$$E\left\{\left\|\sum_{j=1}^n X_j\right\|^p\right\} \leqq C\left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^n (|X_j|^2 - |X'_j|^2)\right\|_{E_{(2)}}^{p/2}\right\} + \left\|E\Big\{\Big(\sum_{j=1}^n |X_j|^2\Big)^{1/2}\Big\}\right\|^p\right)$$

$$\leqq C\left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^n r_j |X_j|^2\right\|_{E_{(2)}}^{p/2}\right\} + \left\|E\Big\{\Big(\sum_{j=1}^n |X_j|^2\Big)^{1/2}\Big\}\right\|^p\right)$$

où $E_{(2)}$ désigne la 2-concavification de E. $E_{(2)}$ est $p/2$-convexe et $q/2$-concave. Si $p \leqq 4$, $E_{(2)}$ est de type $p/2$ de sorte que

$$E\left\{\left\|\sum_{j=1}^n r_j |X_j|^2\right\|_{E_{(2)}}^{p/2}\right\} \leqq C\sum_{j=1}^n E\{\| \, |X_j|^2 \|_{E_{(2)}}^{p/2}\} \leqq C\sum_{j=1}^n E\{\|X_j\|^p\}.$$

Comme, d'après le lemme 2.9,

$$\left\|E\Big\{\Big(\sum_{j=1}^n |X_j|^2\Big)^{1/2}\Big\}\right\| \leqq n^{1/2}\|(E\{|X_1|^2\})^{1/2}\|$$

$$= n^{1/2}\|(E\{|G(X_1)|^2\})^{1/2}\|$$

$$\leqq Mn^{1/2}(E\{\|G(X_1)\|^2\})^{1/2},$$

on constate que E vérifie $\mathrm{Ros}(p)$. Si $p > 4$, par une nouvelle application des inégalités de Khintchine, mais dans $E_{(2)}$ cette fois, nous obtenons:

$$E\left\{\left\|\sum_{j=1}^n r_j |X_j|^2\right\|_{E_{(2)}}^{p/2}\right\} \leqq CE\left\{\left\|\Big(\sum_{j=1}^n |X_j|^4\Big)^{1/2}\right\|_{E_{(2)}}^{p/2}\right\}$$

$$\leqq CE\left\{\left\|\Big(\sum_{j=1}^n |X_j|^4\Big)^{1/4}\right\|^p\right\};$$

puis, avec les mêmes notations que précédemment,

$$\Big(\sum_{j=1}^n |X_j|^4\Big)^{1/4} \leqq E'\left\{\left|\sum_{j=1}^n (|X_j|^4 - |X'_j|^4)\right|^{1/4}\right\} + E\Big\{\Big(\sum_{j=1}^n |X_j|^4\Big)^{1/4}\Big\},$$

et par conséquent

$$E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} r_j |X_j|^2\right\|_{E_{(2)}}^{p/2}\right\} \leqq C\left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} r_j |X_j|^4\right\|_{E_{(4)}}^{p/4}\right\} + \left\|E\left\{\left(\sum_{j=1}^{n} |X_j|^2\right)^{1/2}\right\}\right\|^p\right).$$

La 4-concavification $E_{(4)}$ de E est $p/4$-convexe et $q/4$-concave. Si $p \leqq 8$, $E_{(4)}$ est de type $p/4$ et donc:

$$E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} r_j |X_j|^4\right\|_{E_{(4)}}^{p/4}\right\} \leqq C\sum_{j=1}^{n} E\{\| |X_j|^4 \|_{E_{(4)}}^{p/4}\} \leqq C\sum_{j=1}^{n} E\{\|X_j\|^p\}.$$

Il s'ensuit que E vérifie Ros(p). Si $p > 8$, le raisonnement se poursuit jusqu'à l'entier m tel que $p \leqq 2^m$.

Des propriétés que nous venons d'établir concernant l'inégalité de Rosenthal, il ressort clairement que l'on peut dresser un parallèle entre les inégalités Ros et Λ-Ros d'une part, et les inégalités de type (Rademacher) et de type stable d'autre part. Rappelons à cet effet qu'un espace normé est de type p-stable ($1 \leqq p < 2$) s'il existe un réel $\alpha < p$ et une constante C tels que, pour toute suite finie $(\theta_j)_{1 \leqq j \leqq n}$ de v.a. réelles stables de transformées de Fourier $e^{-|t|^p}$ et toute suite $(x_j)_{1 \leqq j \leqq n}$ d'éléments de E, on ait:

$$\left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} \theta_j x_j\right\|^{\alpha}\right\}\right)^{1/\alpha} \leqq C\left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^p\right)^{1/p}.$$

Le parallèle sera plus complet avec la proposition suivante [29].

Proposition 2.10. *Soit E un espace de Banach; E est de type p (resp. de type p-stable) si et seulement si il existe une constante C telle que, pour toute suite finie $(X_j)_{1 \leqq j \leqq n}$ de v.a. indépendantes symétriques bornées à valeurs dans E,*

$$\left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} X_j\right\|^p\right\}\right)^{1/p} \leqq C\left(\sum_{j=1}^{n} E\{\|X_j\|^p\}\right)^{1/p}$$

(*resp.*

$$\Lambda_p\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) \leqq C\left(\sup_{t>0} t^p \sum_{j=1}^{n} P\{\|X_j\| > t\}\right)^{1/p}\right).$$

Démonstration. L'assertion concernant le type s'obtient aisément par intégration. Nous démontrons la seconde partie. Il est clair que l'inégalité de la proposition implique que E est de type p-stable; en effet, le choix de $X_j = \theta_j x_j$ et le fait que $\sup_{t>0} t^p P\{|\theta_j| > t\} < \infty$ fournissent la conclusion. Réciproquement, si E est de type p-stable, un théorème important de B. Maurey et G. Pisier [23], [21], [25], nous assure qu'il existe $p' > p$ tel que E est de type p'-stable et donc de type p'. Alors, en vertu de la proposition 2.1, de la première partie de l'énoncé et du lemme 2.2,

$$\Lambda_p\left(\sum_{j=1}^n X_j\right) \leqq C\left(\Lambda_p\left(\max_{1\leqq j\leqq n}\|X_j\|\right) + \left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^n X_j I_{\{\|X_j\|\leqq\delta_0\}}\right\|^{p'}\right\}\right)^{1/p'}\right)$$

$$\leqq C\left(\Lambda_p\left(\max_{1\leqq j\leqq n}\|X_j\|\right) + \left(\sum_{j=1}^n E\{\|X_j\|^{p'} I_{\{\|X_j\|\leqq\delta_0\}}\}\right)^{1/p'}\right)$$

$$\leqq C\left(\sup_{t>0} t^p \sum_{j=1}^n P\{\|X_j\|>t\}\right)^{1/p}.$$

La démonstration de cette proposition s'appuie de façon essentielle sur le fait que l'intervalle des p pour lesquels E est de type p-stable est ouvert. Ceci nous conduit à poser le problème suivant.

PROBLÈME. L'intervalle des r tels que E vérifie Λ-Ros(r) est-il ouvert?

3. Applications aux théorèmes limites

Comme les notions de type et de cotype, l'inégalité de Rosenthal est d'un intérêt particulier dans l'étude du théorème limite central (TLC) dans les espaces de Banach, comme il ressort déjà de divers travaux [7], [31]. Par sa forme même, l'inégalité de Rosenthal justifie la convergence de sommes normalisées de v.a. équidistribuées vers une loi gaussienne à partir de conditions portant à la fois sur les moments des variables considérées et sur leur structure de covariance gaussienne. Nous examinerons ainsi, dans ce paragraphe, le TLC classique dans les espaces vérifiant Λ-Ros(2) ou Ros(2) et dans les espaces de la forme $l_p(E)$ où E lui-même satisfait Ros(r) pour un certain r. Nous renvoyons à [3] pour une présentation générale du TLC dans les espaces de Banach.

Soit E un espace de Banach; si X est une v.a. à valeurs dans E, $(X_n)_{n\geqq 1}$ désignera désormais une suite de copies indépendantes de X et, pour tout n, $S_n(X) = X_1 + \cdots + X_n$. On dit alors que X vérifie le TLC si la suite $(S_n(X)/\sqrt{n})_{n\geqq 1}$ converge en loi dans E vers une mesure de Radon. Sa limite est bien entendu, d'après le TLC en dimension finie, une v.a. gaussienne de même structure de covariance que X, de sorte qu'une v.a. vérifiant le TLC est nécessairement prégaussienne.

Les deux théorèmes suivants sont les résultats les plus connus (et peut-être les plus importants) concernant le TLC dans les espaces de Banach. Ils caractérisent les propriétés de type 2 et de cotype 2 à partir du TLC.

THÉORÈME 3.1. [11], [24] *Soit E un espace de Banach; E est de type 2 si et* *seulement si toute v.a. centrée X à valeurs dans E telle que* $E\{\|X\|^2\}<\infty$ *vérifie le* TLC.

THÉORÈME 3.2. [4], [12], [24] *Soit E un espace de Banach; E est de cotype* 2 *si et seulement si toute v.a. prégaussienne à valeurs dans E vérifie le* TLC.

La différence essentielle entre ces deux énoncés provient du fait que si le caractére prégaussien est nécessaire pour le TLC, en général une v.a. X satisfaisant au TLC n'est pas de carré intégrable en norme; on peut seulement affirmer que [1], [26]:

$$\lim_{t\to\infty} t^2 P\{\|X\|>t\}=0.$$

Cette observation conduit à étudier les espaces dans lesquels les conditions X prégaussienne et $\lim_{t\to\infty} t^2P\{\|X\|>t\}=0$ sont (nécessaires et) suffisantes pour que X vérifie le TLC. Ces espaces sont en fait caractérisés par l'intermédiaire de l'inégalité de Rosenthal de la façon suivante.

THÉORÈME 3.3. *Soit E un espace de Banach; E vérifie* Λ-Ros(2) *si et seulement si toute v.a. prégaussienne X à valeurs dans E telle que* $\lim_{t\to\infty} t^2P\{\|X\|>t\}=0$ *vérifie le* TLC.

Compte tenu des diverses propriétés établies dans la section précédente, ce théorème généralise plusieurs résultats récents sur le TLC dans certains espaces de Banach [26], [8], [18], et situe le théorème 3.2 dans cet ensemble. L'énoncé 3.1, quant à lui, peut se préciser avec Ros(2), justifiant ainsi la différence issue de l'hypothèse d'intégrabilité au carré.

THÉORÈME 3.4. *Soit E un espace de Banach; E vérifie* Ros(2) *si et seulement si toute v.a. prégaussienne X à valeurs dans E telle que* $E\{\|X\|^2\}<\infty$ *vérifie le* TLC.

Nous nous contenterons de la preuve du théorème 3.3, celle du théorème 3.4 étant entièrement analogue. La proposition suivante nous sera utile en cours de démonstration ainsi que lors des développements ultérieurs; c'est l'argument usuel (et essentiel) [24] d'approximation par des v.a. de dimension finie.

PROPOSITION 3.5. *Soit E un espace de Banach; une v.a. X sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$ à valeurs dans E vérifie le* TLC *si et seulement si il existe, pour tout* $\varepsilon>0$, *une v.a. étagée centrée Y sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$ telle que*

$$\sup_n \Lambda_2\left(\frac{S_n(X-Y)}{\sqrt{n}}\right)<\varepsilon.$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.3. Si E vérifie Λ-Ros(2), il existe une constante C telle que, pour toute v.a. prégaussienne X à valeurs dans E vérifiant $\lim_{t\to\infty} t^2 P\{\|X\|>t\}=0$, on ait:

$$\sup_n \Lambda_2\left(\frac{S_n(X)}{\sqrt{n}}\right) \leqq C(\Lambda_2(X)+\Lambda_2(G(X))).$$

Soit alors X une telle v.a.; montrons qu'elle vérifie le TLC. Pour tout $\varepsilon>0$, nous construisons une v.a. étagée centrée Y telle que:

$$\Lambda_2(X-Y)+\Lambda_2(G(X-Y))<\varepsilon.$$

A cet effet, nous pouvons supposer, sans perte de la généralité, X bornée compte tenu du fait que

$$\lim_{t\to\infty}(\Lambda_2(XI_{\{\|X\|>t\}})+\Lambda_2(G(XI_{\{\|X\|>t\}})))=0.$$

X étant définie sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$, considérons, comme déjà précédemment, une suite croissante $(\mathcal{F}_N)$ de sous-tribus finies de $\mathcal{F}$ telle que $(X^N)=(E\{X \mid \mathcal{F}_N\})$ converge p.s. et dans $L_2(\Omega,\mathcal{F},P;E)$ vers X. Le procédé d'approximation sera clairement explicité et Y mise en évidence si nous montrons que la suite $(G(X^N))$ converge, dans $L_2(E)$ par exemple, vers $G(X)$. Or pour tout entier N et tout f de E',

$$E\{f^2(X^N)\}\leqq E\{f^2(X)\} \quad \text{et} \quad \lim_{N\to\infty} E\{f^2(X^N)\}=E\{f^2(X)\},$$

de sorte que, en vertu des propriétés de comparaison gaussienne, la suite $(G(X^N))$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence étroite et converge pour cette topologie vers $G(X)$. De l'intégrabilité gaussienne, nous déduisons que cette convergence a également lieu dans $L_2(E)$ ce qui était demandé. L'inégalité Λ-Ros(2) pour $X-Y$ et la proposition 3.5 permettent alors de conclure. Réciproquement, si dans E toute v.a. prégaussienne X telle que $\lim_{t\to\infty} t^2P\{\|X\|>t\}=0$ vérifie le TLC, un argument de graphe fermé entre l'adhérence des v.a. étagées centrées sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$ pour la norme $\Lambda_2(X)+\Lambda_2(G(X))$ et les v.a. X sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$ telles que $\sup_n \Lambda_2(S_n(X)/\sqrt{n})<\infty$ fournit une constante C telle que, pour toute v.a. prégaussienne symétrique bornée X à valeurs dans E,

$$\sup_n \Lambda_2\left(\frac{S_n(X)}{\sqrt{n}}\right) \leqq C(\Lambda_2(X)+\Lambda_2(G(X))),$$

la constante pouvant être choisie indépendante de l'espace d'épreuves. E vérifie donc Λ-Ros(2) en vertu de la proposition 2.3.

Si le théorème 3.3 caractérise les espaces de Banach dans lesquels les conditions nécessaires classiques pour le TLC sont également suffisantes, il laisse bien entendu de côté nombre d'espaces où le problème limite central n'est pas résolu, à commencer par les espaces de la forme $l_p(E)$ lorsque $1 \leqq p \leqq 2$ et E n'est pas de cotype 2 qui ne vérifient pas Λ-Ros(2) (cf. proposition 2.7 et [8], [18]). Le théorème suivant, qui a pour origine un énoncé de E. Giné et J. Zinn [8] dans les espaces $l_2(l_p)$, $2 < p < \infty$, donne des conditions nécessaires et suffisantes non classiques pour le TLC dans certains de ces espaces à partir de la seule loi de la variable considérée. L'inégalité de Rosenthal apparaît de façon naturelle au cours des démonstrations.

Introduisons pour commencer les notations nécessaires à la présentation du résultat. Soit E un espace de Banach et soit p un réel de $[1, \infty)$; si X est une v.a. à valeurs dans $l_p(E)$, $(X^k)_{k \geqq 1}$ désignera la suite de ses composantes dans $l_p(E)$. Il est clair que si X est prégaussienne dans $l_p(E)$, toutes ses composantes le sont dans E et $(G(X^k))_{k \geqq 1}$ constitue une version de $G(X)$. X étant fixée à valeurs dans $l_p(E)$, posons, pour tout entier n,

$$I_n(X) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} E\left\{ \max_{1 \leqq j \leqq n} \left(\frac{\|X_j^k\|}{\sqrt{n}} \right)^p I_{\{\|X_j\| \leqq \delta_0(n)\}} \right\} \right)^{1/p},$$

$$J_n(X) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(nE\left\{ \left(\frac{\|X^k\|}{\sqrt{n}} \right)^r I_{\{\|X^k\| \leqq \delta_0(k,n), \|X\| \leqq \delta_0(n)\}} \right\} \right)^{p/r} \right)^{1/p}$$

où r est un réel positif (précisé dans la suite) et où

$$\delta_0(n) = \inf\{u > 0 : nP\{\|X\| > u\} \leqq (8.3^p)^{-1}\}$$

et

$$\delta_0(k, n) = \inf\{u > 0 : nP\{\|X^k\| > u, \|X\| \leqq \delta_0(n)\} \leqq (8.3^p)^{-1}\}.$$

$(e_k)_{k \geqq 1}$ désignant la base canonique de l_p, pour tout entier N nous noterons Π_N et R_N les opérateurs de $l_p(E)$ dans lui-même définis par: si $x = (x^k) \in l_p(E)$,

$$\Pi_N(x) = \sum_{k=1}^{N} x^k e_k, \qquad R_N(x) = x - \Pi_N(x).$$

Le résultat annoncé est alors le suivant.

THÉORÈME 3.6. *Soient $p \in [1, \infty)$, $r \in (2, \infty)$ et E un espace de Banach; si E est de cotype r et vérifie* Ros(r), *pour qu'une v.a. X à valeurs dans $l_p(E)$ vérifie le* TLC, *il faut et il suffit que les quatre conditions suivantes soient réalisées*:

(i) *X est prégaussienne*;

(ii) $\lim_{t\to\infty} t^2 P\{\|X\|>t\}=0$;
(iii) $\overline{\lim}_{N\to\infty}\overline{\lim}_{n\to\infty} I_n(R_N(X))=0$;
(iv) $\overline{\lim}_{N\to\infty}\overline{\lim}_{n\to\infty} J_n(R_N(X))=0$.

REMARQUE. Si $p>2$, $l_p(E)$ vérifie $\mathrm{Ros}(r\wedge p)$, donc Λ-Ros(2), de sorte que le TLC est, dans ce cas, caractérisé par le théorème 3.3. Cette situation est contenue dans l'énoncé 3.6 puisque l'on vérifie aisément que si $p>2$, pour toute v.a. X à valeurs dans $l_p(E)$ telle que $\Lambda_2(X)<\infty$ et tout entier n:

$$I_n(X)+J_n(X)\leqq C\Lambda_2(X)$$

pour une certaine constante C. De la même façon, si $1\leqq p\leqq 2$ et E est de cotype 2, les lemmes 3.7 et 3.8 ci-dessous montrent immédiatement que pour toute v.a. prégaussienne X dans $l_p(E)$ et tout entier n:

$$I_n(X)+J_n(X)\leqq C\Lambda_2(G(X)).$$

DÉMONSTRATION. Elle se décompose en trois lemmes d'intérêt indépendant. C désignera tout au long de la preuve une constante ne dépendant que des paramètres de l'énoncé et suceptible de changer de place en place.

LEMME 3.7. *Soient p un réel de $[1,\infty)$ et E un espace de Banach; pour toute v.a. centrée X à valeurs dans $l_p(E)$ telle que $\Lambda_2(X)<\infty$ et tout n,*

$$I_n(X)\leqq C\left(\Lambda_2(X)+E\left\{\frac{\|S_n(X)\|}{\sqrt{n}}\right\}\right).$$

DÉMONSTRATION. Supposons pour commencer X symétrique. D'après les inégalités de Lévy et Hoffmann-Jørgensen (voir proposition 2.1), pour tout entier n:

$$\begin{aligned}I_n^p(X)&\leqq 2\sum_{k=1}^{\infty} E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n}\frac{X_j^k}{\sqrt{n}} I_{\{\|X_j\|\leqq\delta_0(n)\}}\right\|^p\right\}\\&=2E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n}\frac{X_j}{\sqrt{n}} I_{\{\|X_j\|\leqq\delta_0(n)\}}\right\|^p\right\}\\&\leqq C\left(\left(\frac{\delta_0(n)}{\sqrt{n}}\right)^p+\left(E\left\{\frac{\|S_n(X)\|}{\sqrt{n}}\right\}\right)^p\right).\end{aligned}$$

On vérifie immédiatement que $\delta_0(n)\leqq C\sqrt{n}\Lambda_2(X)$. Par ailleurs, si X est seulement centrée, le remplacement de X par rX dans les opérations précédentes, où r désigne une v.a. de Rademacher indépendante de X, et l'inégalité

$$E\{\|S_n(rX)\|\}\leqq 2E\{\|S_n(X)\|\}$$

fournissent la majoration désirée.

LEMME 3.8. *Soient p un réel de* $[1,\infty)$ *et E un espace de Banach de cotype* $r\in(2,\infty)$; *pour toute v.a. centrée X à valeurs dans* $l_p(E)$ *telle que* $\Lambda_2(X)<\infty$ *et tout entier n,*

$$J_n(X)\leqq C\left(\Lambda_2(X)+E\left\{\frac{\|S_n(X)\|}{\sqrt{n}}\right\}\right).$$

DÉMONSTRATION. Supposons X symétrique; pour tout n, sous l'hypothèse de cotype r de E,

$$J_n^p(X)\leqq C\sum_{k=1}^{\infty}\left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n}\frac{X_j^k}{\sqrt{n}}I_{\{\|X_j^k\|\leqq\delta_0(k,n),\|X_j\|\leqq\delta_0(n)\}}\right\|^r\right\}\right)^{p/r},$$

puis, par la proposition 2.1,

$$J_n^p(X)\leqq C\sum_{k=1}^{\infty}E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n}\frac{X_j^k}{\sqrt{n}}I_{\{\|X_j\|\leqq\delta_0(n)\}}\right\|^p\right\}.$$

On conclut alors comme dans le lemme précédent.

LEMME 3.9. *Soient p un réel de* $[1,\infty)$ *et E un espace de Banach vérifiant* Ros(r) *pour un* $r>2$; *pour tout v.a. prégaussienne X à valeurs dans* $l_p(E)$ *telle que* $\Lambda_2(X)<\infty$ *et tout entier n,*

$$\Lambda_2\left(\frac{S_n(X)}{\sqrt{n}}\right)\leqq C(\Lambda_2(X)+\Lambda_2(G(X))+I_n(X)+J_n(X)).$$

DÉMONSTRATION. Soit X prégaussienne symétrique à valeurs dans $l_p(E)$ vérifiant $\Lambda_2(X)<\infty$ et soit n un entier; d'après la proposition 2.1:

$$\begin{aligned}\Lambda_2\left(\frac{S_n(X)}{\sqrt{n}}\right)&\leqq C\left(\Lambda_2\left(\max_{1\leqq j\leqq n}\frac{\|X_j\|}{\sqrt{n}}\right)+\left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n}\frac{X_j}{\sqrt{n}}I_{\{\|X_j\|\leqq\delta_0'(n)\}}\right\|^p\right\}\right)^{1/p}\right)\\&\leqq C\left(\Lambda_2(X)+\left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n}\frac{X_j}{\sqrt{n}}I_{\{\|X_j\|\leqq\delta_0'(n)\}}\right\|^p\right\}\right)^{1/p}\right)\end{aligned}$$

où $\delta_0'(n)=\inf\{u>0:nP\{\|X\|>u\}\leqq\frac{1}{72}\}$. Par une nouvelle application de la proposition 2.1,

$$E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n}\frac{X_j}{\sqrt{n}}I_{\{\|X_j\|\leqq\delta_0'(n)\}}\right\|^p\right\}\leqq C\left(\left(\frac{\delta_0'(n)}{\sqrt{n}}\right)^p+E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n}\frac{X_j}{\sqrt{n}}I_{\{\|X_j\|\leqq\delta_0(n)\}}\right\|^p\right\}\right).$$

En résumé:

$$\Lambda_2\left(\frac{S_n(X)}{\sqrt{n}}\right) \leqq C\left(\Lambda_2(X) + \left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{X_j}{\sqrt{n}} I_{\{\|X_j\| \leqq \delta_0(n)\}}\right\|^p\right\}\right)^{1/p}\right).$$

A présent,

$$E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{X_j}{\sqrt{n}} I_{\{\|X_j\| \leqq \delta_0(n)\}}\right\|^p\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{X_j^k}{\sqrt{n}} I_{\{\|X_j\| \leqq \delta_0(n)\}}\right\|^p\right\},$$

quantité majorée, en vertu de la proposition 2.1, par:

$$C\left(I_n^p(X) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{X_j^k}{\sqrt{n}} I_{\{\|X_j^k\| \leqq \delta_0(k,n), \|X_j\| \leqq \delta_0(n)\}}\right\|^r\right\}\right)^{p/r}\right).$$

Enfin, E vérifiant Ros(r), le deuxième terme de cette dernière expression se majore par

$$C(J_n^p(X) + \Lambda_2^p(G(X))).$$

L'assertion du lemme s'ensuit pour X symétrique; le cas général s'en déduit par symétrisation.

Concluons à présent la démonstration du théorème 3.6. La nécessité des conditions (iii) et (iv) s'obtient des lemmes 3.7 et 3.8: pour tout N, par convergence des moments dans le TLC,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(I_n(R_N(X)) + J_n(R_N(X))) \leqq C(\Lambda_2(R_N(X)) + \Lambda_2(G(R_N(X)))),$$

d'où le résultat compte tenu de

$$\lim_{N\to\infty}(\Lambda_2(R_N(X)) + \Lambda_2(G(R_N(X)))) = 0.$$

Réciproquement, les conditions (i)–(iv) étant satisfaites, le lemme 3.9 fournit, pour tout $\varepsilon > 0$, un entier N tel que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\Lambda_2\left(\frac{S_n(X - \Pi_N(X))}{\sqrt{n}}\right) < \varepsilon.$$

Pour tout $k = 1, \ldots, N$, le théorème 3.3 s'applique aux v.a. X^k à valeurs dans E; il s'ensuit que $\Pi_N(X)$ satisfait au TLC dans $l_p(E)$. La proposition 3.5, plus précisément sa preuve, nous assure alors que X vérifie le TLC. Ceci termine la démonstration du théorème 3.6.

Remarque. Le lecteur se convaincra aisément de ce que les raisonnements ci-dessus permettent également de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une v.a. X à valeurs dans $l_{p_1}(l_{p_2}(\ldots(l_{p_i}(E))\ldots))$, $1 \leqq p_1, p_2, \ldots, p_i < \infty$, E de cotype r et vérifiant $\mathrm{Ros}(r)$, $r \in (2, \infty)$, satisfait au TLC, à partir de la seule loi de la variable X. Nous ne les détaillons pas pour alléger la présentation.

Si l'inégalité de Rosenthal est d'un intérêt particulier dans l'étude du TLC dans les espaces de Banach, elle n'est pas limitée à ce seul cadre; nous concluons cet article par une caractérisation de l'inégalité de Rosenthal à partir de la loi des grands nombres, caractérisation analogue à celle de la propriété de type [11].

THÉORÈME 3.10. *Soient* $r \in [1, \infty)$ *et* E *un espace de Banach*; *les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) E *vérifie* $\mathrm{Ros}(r)$;

(ii) *pour toute suite* $(X_j)_{j \geqq 1}$ *de v.a. indépendantes prégaussiennes à valeurs dans* E, *si*:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{E\{\|X_j\|^r\}}{j^r} < \infty \quad et \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{G(X_j)}{j} \text{ converge p.s.},$$

alors la suite (X_j) *satisfait à la loi des grands nombres, i.e.*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j = 0 \quad p.s.$$

DÉMONSTRATION. (i) $\Rightarrow$ (ii). Par hypothèse, il existe une constante C telle que:

$$E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{\infty} \frac{X_j}{j}\right\|^r\right\} \leqq C\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{E\{\|X_j\|^r}{j^r} + E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{\infty} \frac{G(X_j)}{j}\right\|^r\right\}\right).$$

Donc $\sum_{j=1}^{\infty} X_j/j$ converge p.s. et (X_j) vérifie la loi des grands nombres en vertu du lemme de Kronecker. (ii) $\Rightarrow$ (i). Si l'implication du point (ii) est satisfaite, la suite $((1/n)\sum_{j=1}^{n} X_j)_{n \geqq 1}$ converge non seulement p.s. mais dans $L_r(E)$ [10]. Ainsi, par un argument de graphe fermé, il existe une constante C telle que l'on ait, pour toute suite (X_j) de v.a. indépendantes prégaussiennes bornées à valeurs dans E:

$$\sup_n \frac{1}{n}\left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} X_j\right\|^r\right\}\right)^{1/r} \leqq C\left(\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{E\{\|X_j\|^r\}}{j^r}\right)^{1/r} + \left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{\infty} \frac{G(X_j)}{j}\right\|^r\right\}\right)^{1/r}\right).$$

Considérons une suite finie $(X_j)_{1 \leqq j \leqq n}$ de telles v.a. et appliquons cette inégalité à la suite

$$(\underbrace{0, \ldots, 0}_{m \text{ termes}}, X_1, \ldots, X_n, 0, 0, \ldots);$$

on a:

$$\frac{1}{m+n}\left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} X_j\right\|^r\right\}\right)^{1/r} \leqq C\left(\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{E\{\|X_j\|^r\}}{(m+j)^r}\right)^{1/r}+\left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n}\frac{G(X_j)}{m+j}\right\|^r\right\}\right)^{1/r}\right)$$

$$\leqq \frac{C}{m+1}\left(\left(\sum_{j=1}^{n} E\{\|X_j\|^r\}\right)^{1/r}+\left(E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} G(X_j)\right\|\right\}\right)^{1/r}\right)$$

et quand m tend vers l'infini nous constatons que E vérifie $\mathrm{Ros}(r)$.

Nous construisons pour finir un exemple d'une suite de v.a. à valeurs dans l_p, $p>2$, pour laquelle les propositions classiques sur la loi des grands nombres dans les espaces de Banach ne permettent pas de conclure et qui entre dans le cadre d'application du théorème 3.10. Nous nous plaçons donc dans l_p, $p>2$. Soit (r_j^k) une suite double de v.a. de Rademacher indépendantes; pour tout j, désignons par n_j la partie entière de $j^{p/2}$. Posons

$$X_j=\sum_{k=1}^{\infty} I_{\{n_j^2\leqq k<n_j^2+n_j\}} r_j^k e_k$$

où (e_k) est la base canonique de l_p. Clairement $\|X_j\|^p=n_j$ de sorte que

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{E\{\|X_j\|^p\}}{j^p}<\infty.$$

Par ailleurs,

$$G(X_j)=\sum_{k=1}^{\infty} I_{\{n_j^2\leqq k<n_j^2+n_j\}} g_j^k e_k$$

où (g_j^k) est une suite double de v.a. normales centrées réduites indépendantes. Pour tout $j\geqq j_0$ suffisament grand les intervalles $[n_j^2, n_j^2+n_j)$ sont disjoints et donc

$$E\left\{\left\|\sum_{j=j_0}^{\infty}\frac{G(X_j)}{j}\right\|^p\right\}=\sum_{k=1}^{\infty} E\left\{\left|\sum_{j=j_0}^{\infty}\frac{1}{j} I_{\{n_j^2\leqq k<n_j^2+n_j\}} g_j^k\right|^p\right\}$$

$$=E\{|g_1^1|^p\}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=j_0}^{\infty}\frac{1}{j^p} I_{\{n_j^2\leqq k<n_j^2+n_j\}}$$

$$=E\{|g_1^1|^p\}\sum_{j=j_0}^{\infty}\frac{n_j}{j^p}<\infty.$$

l_p vérifiant $\mathrm{Ros}(p)$, nous en concluons que cette suite satisfait à la loi des grands nombres. Même si l_p, $p>2$, est de type 2 [11], [15], [30], et 2-lisse [9], les lois des grands nombres dans ces espaces n'autorisent pas une telle conclusion puisque:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{E\{\|X_j\|^2\}}{j^2} = \infty$$

et même:

$$\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} E\{\|X_j\|^2\} = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} \|X_j\|^2 \not\to 0 \quad \text{p.s.}$$

Références

1. A. de Acosta, A. Araujo and E. Giné, *On Poisson measures, Gaussian measures and the central limit theorem in Banach spaces*, in *Advances in Probability*, Vol. 4, Dekker, New York, 1978, pp. 1–68.
2. T. W. Anderson, *The integral of a symmetric unimodal function over a symmetric convex set and some probability inequalities*, Proc. Am. Math. Soc. **6** (1955), 170–176.
3. A. Araujo and E. Giné, *The Central Limit Theorem for Real and Banach Valued Random Variables*, Wiley, New York, 1980.
4. S. A. Chobanjan and V. I. Tarieladze, *Gaussian characterization of certain Banach spaces*, J. Multivar. Anal. **7** (1977), 183–203.
5. S. A. Chobanjan and V. I. Tarieladze, *A counterexample concerning CLT in Banach spaces*, in *Probability Theory on Vector Spaces, Poland 1977*, Lecture Notes in Math. **656**, Springer, Berlin 1978, pp. 25–30.
6. X. Fernique, *Intégrabilité des vecteurs gaussiens*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série A, **270** (1970), 1698–1699.
7. E. Giné, V. Mandrekar and J. Zinn, *On sums of independent random variables with values in* L_p, $2 \leqq p < \infty$, in *Probability in Banach Spaces II, Oberwolfach 1978*, Lecture Notes in Math. **709**, Springer, Berlin, 1979, pp. 111–124.
8. E. Giné and J. Zinn, *Central limit theorems and weak laws of large numbers in certain Banach spaces*, Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. **62** (1983), 323–354.
9. B. Heinkel, *On the law of large numbers in 2-uniformly smooth Banach spaces*, Ann. Probab. **12** (1984), 851–857.
10. J. Hoffmann-Jørgensen, *Sums of independent Banach space valued random variables*, Studia Math. **52** (1974), 159–186.
11. J. Hoffmann-Jørgensen and G. Pisier, *The law of large numbers and the central limit theorem in Banach spaces*, Ann. Probab. **4** (1976), 587–599.
12. N. C. Jain, *Central limit theorem and related questions in Banach spaces*, Proc. Symp. in Pure Math. XXXI, Am. Math. Soc., Providence, 1977, pp. 55–65.
13. J. P. Kahane, *Some Random Series of Functions*, Heath, Lexington, 1968.
14. J. L. Krivine, *Théorèmes de factorisation dans les espaces réticulés*, Séminaire Maurey-Schwartz 1973–74, exposés XXII et XXIII, Ecole Polytechnique, Paris, 1974.
15. J. Kuelbs and J. Zinn, *Some stability results for vector valued random variables*, Ann. Probab. **7** (1979), 75–84.
16. H. J. Landau and L. Shepp, *On the supremum of a Gaussian process*, Sankhya, Ser. A **32** (1971), 369–378.
17. L. Le Cam, *Remarques sur le théorème limite central dans les espaces localement convexes*, in *Les probabilités sur les structures algébriques*, Colloq. C. N. R. S., Paris, 1970, pp. 233–249.
18. M. Ledoux, *Théorème limite central dans les espaces* $l_p(B)$ $(1 \leqq p < \infty)$, Ann. Inst. H. Poincaré **19** (1983), 393–411.
19. J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces II*, Springer, Berlin, 1979.
20. B. Maurey, *Type et cotype dans les espaces munis de structures locales inconditionnelles*, Séminaire Maurey-Schwartz 1973–74,, exposés XXIV et XXV, Ecole Polytechnique, Paris, 1974.

21. B. Maurey and G. Pisier, *Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach*, Studia Math. **58** (1976), 45–90.

22. G. Pisier, *"Type" des espaces normés*, Séminaire Maurey–Schwartz 1973–74, exposé III, Ecole Polytechnique, Paris, 1974.

23. G. Pisier, *Une propriété du type p-stable*, Séminaire Maurey–Schwartz 1973–74, exposé VIII, Ecole Polytechnique, Paris, 1974.

24. G. Pisier, *Le théorème de la limite centrale et la loi du logarithme itéré dans les espaces de Banach*, Séminaire Maurey–Schwartz 1975–76, exposés III et IV, Ecole Polytechnique, Paris, 1976.

25. G. Pisier, *On the dimension of the l_p^n-subspaces of Banach spaces, for* $1 \leqq p < 2$, Trans. Am. Math. Soc. **276** (1983), 201–211.

26. G. Pisier and J. Zinn, *On the limit theorems for random variables with values in the spaces L_p* ($2 \leqq p < \infty$), Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. **41** (1977), 289–304.

27. H. P. Rosenthal, *On the subspaces of L_p ($p > 2$) spanned by sequences of independent random variables*, Isr. J. Math. **8** (1970), 273–303.

28. H. P. Rosenthal, *On the span in L_p of sequences of independent random variables (II)*, Proc. 6th Berkeley Symp. on Prob. and Stat., Vol. II, Berkeley, Calif., 1971, pp. 149–167.

29. J. Rosiński, *Remarks on Banach spaces of stable type*, Prob. Math. Stat. **1** (1980), 67–71.

30. W. A. Woyczyński, *On Marcinkiewicz–Zygmund laws of large numbers in Banach spaces and related rates of convergence*, Prob. Math. Stat. **1** (1980), 117–131.

31. J. Zinn, *Inequalities in Banach spaces with applications to probabilistic limit theorems: a survey*, in *Probability in Banach Spaces III, Medford 1980*, Lecture Notes in Math. **860**, Springer, Berlin, 1981, pp. 324–329.